第26卷 第3期 宁夏大学学报(自然科学版) 2005年9月
Vol. 26 No. 3 Journal of Ningxia University(Natural Science Edition) Sep. 2005

文章编号: 0253-2328(2005)03-0219-02

Smarandache Ceil 函数的均值

苟 素
(西安邮电学院 应用数理系, 陕西 西安 710061)

摘 要: 研究了 Smarandache Ceil 函数的均值性质, 并用解析方法得到了该函数关于 M 次方根数列均值的一个渐近公式, 从而揭示了该函数在特殊数列中的均值分布性质.

关键词: Smarandache Ceil 函数; M次方根数列; 均值; 渐近公式
分类号: (中图)O156.4 (2000 MR)11B83 文献标志码: A

对于任意正整数 n 及给定的正整数 M, 显然总存在唯一的正整数 i 使得 $i^M \leqslant n < (i+1)^M$. 用 $a(n)$ 表示 n 的 M 次方根部分数列, 即 $a(n)=i$. 例如, 当 $M=3$ 时 $a(1)=a(2)=\cdots=a(7)=1$, $a(8)=a(9)=\cdots=a(26)=2$, $a(27)=3$, $\cdots$. 对给定的正整数 k, 用 $S_k(n)$ 表示 n 的 Smarandache Ceil 函数, 即 $S_k(n)=\min\{m\in\mathbf{N}^*, n\mid m^k\}$, 如 $S_2(2)=2$, $S_2(3)=3$, $S_2(4)=2$. 在 F. Smarandache[1] 的建议下, 不少学者对 $a(n)$ 和 $S_k(n)$ 的算术性质进行了研究[2-3]. 本文主要利用解析方法研究 $S_k(n)$ 对于数列 $a(n)$ 的均值性质, 并得到了以下结论.

定理 1 对任意 $x>2$, 渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(a(n)) = \frac{M}{M+1}x^{1+\frac{1}{M}}\zeta(2k-1)\times \prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+ O\left(x^{1+\frac{1}{2M}+\varepsilon}\right)$$

成立, 式中 $\zeta(s)$ 为 Riemann ζ-函数; $\prod_p$ 表示对所有素数 p 求积.

推论 1 对任意 $x>2$, 渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} S_2(b(n)) = \frac{9}{4\pi^2}x^{\frac{4}{3}}\zeta(3)+O\left(x^{\frac{7}{6}+\varepsilon}\right)$$

成立, 式中 $b(n)$ 为 n 的立方根部分数列.

下面给出定理的证明过程.

对任意 $x>2$, 显然存在唯一的正整数 k_0 使得 $k_0^M\leqslant x<(k_0+1)^M$, 从而

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(a(n)) = \sum_{i\leqslant k_0-1}\ \sum_{i^M\leqslant n<(i+1)^M} S_k(a(n)) + \sum_{k_0^M\leqslant n\leqslant x} S_k(a(n)) =$$
$$\sum_{i\leqslant k_0-1}\left[(i+1)^M-i^M\right]S_k(i)+ O((x-k_0^M)S_k(k_0)) =$$
$$\sum_{i\leqslant k_0-1}(C_M^1 i^{M-1}+C_M^2 i^{M-2}+\cdots+C_M^{M-1} i+C_M^M)S_k(i)+ O((x-k_0^M)S_k(k_0)) =$$
$$\sum_{i\leqslant k_0-1}\left(Mi^{M-1}+\frac{M(M-1)}{2}i^{M-2}+\cdots+Mi+1\right)\times S_k(i)+O((x-k_0^M)S_k(k_0)).$$

因为

$$S_k(k_0)\leqslant k_0,$$
$$0\leqslant x-k_0^M\leqslant (k_0+1)^M-k_0^M = Mk_0^{M-1}+\frac{M(M+1)}{2}k_0^{M-2}+\cdots+Mk_0+1 = k_0^{M-1}\left(M+\frac{M(M+1)}{2k_0}+\cdots+\frac{M}{k_0^{M-2}}+\frac{1}{k_0^{M-1}}\right)\ll x^{1-\frac{1}{M}},$$

所以

$$\sum_{n\leqslant x} S_k(a(n)) = \sum_{i\leqslant x k_0-1}\left(Mi^{M-1}+\frac{M(M-1)}{2}i^{M-2}+\cdots+Mi+1\right)\times S_k(i)+O(x). \tag{1}$$

设

$$\alpha(x)=\sum_{n\leqslant x} S_k(n),$$
$$\beta(x)=Mx^{M-1}+\frac{M(M-1)}{2}x^{M-2}+\cdots+Mx+1,$$

收稿日期: 2005-04-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271093)
作者简介: 苟素(1972-), 女, 讲师, 研究解析数论.

显然$\beta(x)$在$[0,x]$上连续可微,由Abel求和公式[4]可得

$$\sum_{i\leqslant k_0-1}\left(Mi^{M-1}+\frac{M(M-1)}{2}i^{M-2}+\cdots+Mi+1\right)S_k(i)=$$
$$\alpha(k_0-1)\beta(k_0-1)-\int_0^{k_0-1}\alpha(y)\beta'(y)\mathrm{d}y=$$
$$\left(Mk_0^{M-1}+\frac{(M-1)(M-2)}{2}k_0^{M-2}+\cdots+1\right)\times\sum_{i\leqslant k_0-1}S_k(i)-\int_0^{k_0-1}\left(M(M-1)y^{M-2}+\frac{M(M-1)(M-2)}{2}y^{M-3}+\cdots+M\right)\sum_{j\leqslant y}S_k(j)\mathrm{d}y.$$

再由带余项的Perron公式[4]可得

$$\sum_{i\leqslant k_0-1}S_k(i)=\frac{k_0^2}{2}\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(k_0^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right),$$

式中ε为任意给定的正数.所以

$$\int_0^{k_0-1}\left[M(M-1)y^{M-2}+\frac{M(M-1)(M-2)}{2}y^{M-3}+\cdots+M\right]\sum_{i\leqslant y}S_k(i)\mathrm{d}y=$$
$$\int_0^{k_0-1}[M(M-1)y^{M-2}+\cdots+M]\left\{\frac{y^2}{2}\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(y^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)\right\}\mathrm{d}y=$$
$$\int_0^{k_0-1}\left\{\frac{M(M-1)}{2}y^M\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(y^{M+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\right\}\mathrm{d}y=$$
$$\frac{M(M-1)}{2(M+1)}y^{M+1}\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(k_0^{M+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

因此

$$\sum_{i\leqslant k_0-1}\left(Mi^{M-1}+\frac{M(M-1)}{2}i^{M-2}+\cdots+Mi+1\right)S_k(i)=$$
$$(Mk_0^{M-1}+\cdots+1)\left\{\frac{k_0^2}{2}\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(k_0^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)\right\}-$$
$$\frac{M(M-1)}{2(M+1)}k_0^{M+1}\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(k_0^{M+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)=$$
$$\frac{M}{M+1}k_0^{M+1}\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(k_0^{M+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

再结合(1)式可得

$$\sum_{n\leqslant x}S_k(a(n))=$$
$$\frac{M}{M+1}k_0^{M+1}\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(k_0^{M+\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)+O(x)=\frac{M}{M+1}x^{1+\frac{1}{M}}\zeta(2k-1)\times\prod_p\left[1-\frac{1}{p(p+1)}\left(1+\frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right]+O\left(x^{1+\frac{1}{2M}+\varepsilon}\right).$$

证毕.

注1 在定理1中当$M=3$时,$a(n)$即为立方根部分数列$b(n)$,再取$k=2$即可得到推论1.

参考文献:

[1] Smarandache F. **Only problems not solutions**[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993. 82.

[2] Sabin T, Tatiana T. Some new results concerning the Smarandache Ceil function[J]. **Smarandache Nothins Journal**, 2002, **13**(1-2-3): 30.

[3] Yi Yuan, Liang Fangchi. On the primitive numbers of power p and k-power root[A]. Zhang Wenpeng. **Reseach on Smarandache problems in number theory**[C]. Phoenix: Hexis, 2004. 5-8.

[4] 潘承洞,潘承彪.解析数论基础[M].北京:科学出版社,1999. 22-24, 97-99.

On the Mean Value of Smarandache Ceil Function

Gou Su

(Department of Applied Mathematics and Physics, Xi'an Institute of Posts and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

Abstract: The mean value properties of the Smarandache Ceil function was studied, and an asymptotic formula of this function was given by using the analytic methods. This shows that there exists better mean value distribution properties for the Smarandache Ceil function in some special sequences.

Key words: Smarandache Ceil function; M-power roots sequence; mean value; asymptotic formula

(责任编辑、校对 张 娣)